3.3. Particiones y descomposiciones

El problema que nos interesa es: dado un cierto objeto (un conjunto, una permutación o un entero), ¿de cuántas maneras podemos "partirlo" o "descomponerlo" en piezas más sencillas? El carácter de estas piezas variará según el objeto considerado:

- si es un conjunto, lo partiremos en subconjuntos suyos. Al estudio del número de maneras distintas en que se puede hacer esto dedicaremos la subsección 3.3.1.

- si lo que consideramos es una permutación de un cierto conjunto, nos interesará saber de cuántas formas distintas se podrá descomponer como producto de ciclos; lo veremos en la subsección 3.3.2.

- Por último, si lo que tenemos es un entero, el Teorema Fundamental de la Aritmética (véase la subsección 4.1.4) nos dice que se puede escribir, de manera única, como producto de primos. Pero aquí nos ocuparemos de la cuestión aditiva: a saber, el número de formas en que se puede escribir un entero (positivo) como **suma** de otros enteros positivos (en la subsección 3.3.3).

3.3.1. Particiones de conjuntos

Las particiones de conjuntos ya han demostrado ser muy útiles en las cuestiones de Combinatoria: la regla de la suma nos permitía evaluar el tamaño de un conjunto si lo "partíamos" en subconjuntos (disjuntos dos a dos) cuyo tamaño fuera más fácil de calcular. Lo que nos interesa ahora es saber de cuántas maneras se puede hacer eso.

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto con n elementos, que supondremos, como hacemos habitualmente, que son los números $\{1,\dots,n\}$. Una **partición en k bloques no vacíos** de $\mathcal{X}$ será una colección de subconjuntos $\{A_1, A_2, \dots A_k\}$ (los "bloques") tales que

1. los bloques, efectivamente, conforman una partición de $\mathcal{X}$:
$$\mathcal{X} = A_1 \cup \cdots \cup A_k \quad \text{y} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{para cada } i \neq j.$$

2. Y los bloques son no vacíos[16], esto es, $A_i \neq \emptyset$ para cada $i = 1,\dots,k$.

Es importante señalar que *el orden de los elementos dentro de cada bloque es irrelevante y el de presentación de los bloques, también.* Observemos que, pese a que los nombremos como $A_1,\dots,A_k$, no estamos dando un orden entre ellos.

Por ejemplo, si $\mathcal{X}$ fuera el conjunto $\{1,2,3\}$, tendríamos una única partición con un bloque (el propio conjunto $\{1,2,3\}$), tres particiones con dos bloques,
$$\{1,2\}\cup\{3\}, \qquad \{1,3\}\cup\{2\}, \qquad \{2,3\}\cup\{1\}\,;$$

[16] Como queremos contar de cuántas maneras se puede partir el conjunto, parece razonable exigir que los bloques "existan" realmente.

y una partición en tres bloques, $\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$. Ya no hay más, pues queremos que los bloques no sean vacíos. Insistimos en que, por ejemplo, $\{1,2\} \cup \{3\}$, $\{3\} \cup \{1,2\}$ ó $\{3\} \cup \{2,1\}$ representan la misma partición.

Vamos a darle nombre al número de maneras en que se puede partir un conjunto con n elementos en k bloques no vacíos, definiendo los **números de Stirling de segunda especie**:

$$S(n,k) = \# \left\{ \begin{array}{c} \text{particiones distintas del conjunto} \\ \{1,\dots,n\} \text{ en } k \text{ bloques no vacíos} \end{array} \right\}.$$

Una interpretación alternativa es la siguiente: $S(n,k)$ cuenta también el número de posibles distribuciones de n bolas (antes, los elementos del conjunto) en k cajas idénticas (los bloques de la partición), de manera que ninguna caja quede vacía. Observemos: cajas idénticas, luego no hay orden posible entre ellas; y dentro de una caja parece razonable suponer que tampoco el orden es relevante.

¿Cuál es el rango de valores de n y k con el que trabajaremos? Por un lado, exigiremos que $n \geq 1$ (si el conjunto ya es vacío, difícilmente vamos a poder partirlo en bloques no vacíos). Y el segundo índice, el que indica el número de bloques, ha de estar entre 1 y n. Si $k > n$, no vamos a poder hacer ninguna de estas particiones (nos faltarían símbolos para llenar los bloques), así convendremos en que

$$S(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

El número total de particiones de $\{1,\dots,n\}$ en bloques no vacíos se obtendrá clasificando las particiones según el número de bloques que contengan; por la regla de la suma, habrá

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)$$

particiones distintas del conjunto $\{1,\dots,n\}$ (o distribuciones de n bolas numeradas en cajas idénticas). A estos números $B(n)$ los llamaremos **números de Bell**.

Por ejemplo, hemos visto que, para $n = 3$, $S(3,3) = 1$, $S(3,2) = 3$ y $S(3,1) = 1$; y, en total, habrá $B(3) = 5$ particiones distintas del conjunto $\{1,2,3\}$.

La pregunta que nos planteamos ahora es si podemos obtener una fórmula para los $S(n,k)$ o los $B(n)$ en función de los parámetros n y k, como, por ejemplo, teníamos en los coeficientes binómicos. En este caso no hay una fórmula tan sencilla, pero sí tendremos un procedimiento recursivo para calcularlos. Veamos algunos casos particulares para convencernos.

EJEMPLO 3.3.1 *Los "valores frontera" de los números de Stirling de segunda especie.*

Es claro que $S(n,n) = 1$ para cada $n \geq 1$, porque sólo hay una manera de colocar n símbolos en n bloques no vacíos, la que corresponde a situar un símbolo en cada bloque. Quizás la manera adecuada, pese a lo informal, de describir esta partición es decir que cada símbolo va "por su cuenta".

Por otro lado, $S(n,1) = 1$ para cada $n \geq 1$, porque si sólo tenemos un bloque, la única manera de hacer la partición es colocar todos los símbolos en ese bloque (los símbolos van "todos juntos"). ♣

Ejemplo 3.3.2 *El valor de $S(n, n-1)$, para $n \geq 2$.*

Por definición,

$$S(n, n-1) = \#\left\{\text{particiones de } \{1, \dots, n\} \text{ en } n-1 \text{ bloques no vacíos}\right\}.$$

Observemos que sólo hay una configuración posible, la que corresponde a tener un bloque con dos símbolos, y el resto de los símbolos, cada uno en un bloque distinto[17]. Y para contar cuántas de estas configuraciones hay basta decidir qué dos símbolos van juntos. Esto es, basta con elegir dos símbolos de entre los n que están a nuestra disposición (el resto de la partición queda ya determinada). De lo que deducimos que

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

♣

Ejemplo 3.3.3 *El valor de $S(n, 2)$, para $n \geq 2$.*

Ahora tenemos dos bloques, así que bastará decidir qué elementos van en uno de los bloques (los del otro quedan fijados). Estaríamos tentados de aplicar la regla del producto, "llenar" primero el primer bloque y luego el segundo ya queda determinado. Pero aquí no hay un primer o segundo bloque. Esta manera de contar es errónea, pero sabemos en cuánto nos equivocamos. Así que asignemos un orden a los bloques (y luego compensaremos este orden ficticio):

| Bloque 1 | | Bloque 2 |

¿Qué podemos situar en el primer bloque? En principio, cualquier subconjunto de $\{1, \dots, n\}$; y hay 2^n de ellos. Pero no podemos utilizar ni el $\emptyset$ (porque el bloque sería vacío) ni todo $\{1, \dots, n\}$ (porque el otro bloque quedaría vacío). Así que la respuesta sería $2^n - 2$.

Y ahora hay que compensar el orden introducido. En el proceso que hemos hecho estamos distinguiendo entre

$$| \, A \, | \, A^c \, | \quad \text{y} \quad | \, A^c \, | \, A \, |$$

para cada elección (de las $2^n - 2$ válidas) de subconjunto A de $\{1, \dots, n\}$. Y estas dos configuraciones, vistas como particiones en bloques (esto es, sin orden en los bloques) son en realidad la misma. Así que la respuesta correcta es

$$S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

Hay otra manera de verlo (que luego nos será útil en otros cálculos): lo que necesitamos es distinguir un bloque. Una forma de hacerlo es considerar el bloque que contiene a, por ejemplo, el elemento n. Una vez que tenemos este "distinguido" bloque, sólo tenemos que decidir qué elementos lo acompañan en el bloque; o más fácil, qué es lo que va en el otro bloque: hay $2^{n-1} - 1$ posibilidades, todos los posibles subconjuntos (¡con $n-1$ símbolos!, que n ya está colocado), excepto el vacío. ♣

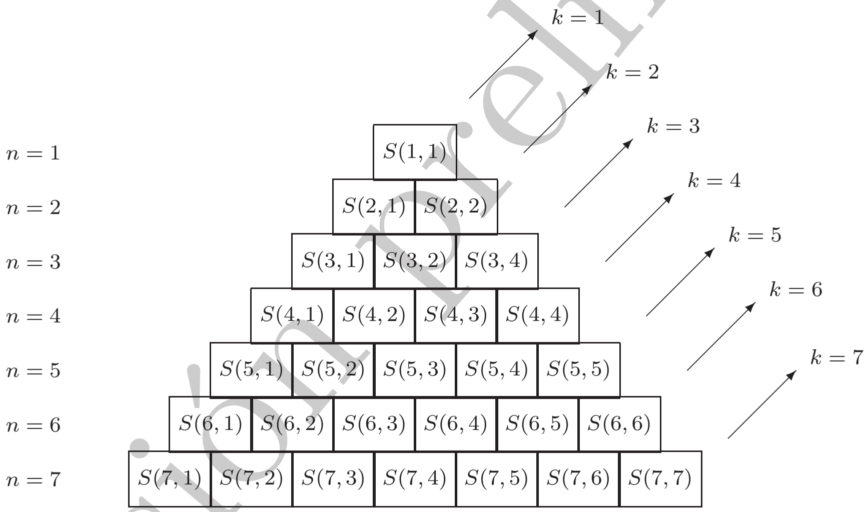
[17] Esto es una aplicación del principio del palomar: como el número de símbolos es una unidad más que el número de bloques, necesariamente uno de los bloques ha de llevar al menos dos símbolos. Y si queremos que todos los bloques sean no vacíos, entonces sólo queda la posibilidad de que un bloque lleve dos símbolos, y el resto uno.

Las dificultades van aumentando considerablemente cuando consideramos otros números de Stirling; por ejemplo, si hay tres o más bloques, ya no está tan claro cómo rellenar los bloques (véase el ejercicio 3.3.1, que ya resulta bastante complicado). Lo mismo ocurriría si tuviéramos $n-2$, $n-3$ o menos bloques (véase el ejercicio 3.3.2).

El aspecto de los resultados obtenidos en los dos ejemplos anteriores (en uno obtenemos un coeficiente binómico, en otro una potencia de 2, esencialmente) nos sugieren que no vamos a obtener una fórmula sencilla para describir estas cantidades. Pero lo que sí tendremos es una regla de recursión que nos permitirá calcularlos todos (construyendo un triángulo como el de Pascal de los coeficientes binómicos).

Recursión con los números de Stirling de segunda especie

Queremos representar los valores de $S(n,k)$ en un triángulo del tipo



(observemos que los índices n y k recorren un rango distinto que en los coeficientes binómicos). Sabemos que $S(n,n) = S(n,1) = 1$ para cada valor de n, así que tenemos los valores de la frontera del triángulo. Inspirados por el caso de los coeficientes binómicos, querríamos expresar $S(n,k)$ en términos de números de Stirling de primer índice $n-1$, números del tipo $S(n-1,\bullet)$ (como segundo índice, quizás k, quizás $k-1$, $k-2$, etc.).

Para conseguir algo así, vamos a necesitar relacionar particiones de n símbolos con particiones de $n-1$ símbolos. Lo haremos clasificando las particiones de $\{1,\dots,n\}$ dependiendo de lo que pase con uno de los símbolos, por ejemplo el último, n. Caben dos posibilidades (disjuntas):

$\boxed{\text{Caso 1}}$ *El bloque que contiene a n no contiene ningún otro elemento.* Consideremos una partición de éstas:

$$\underbrace{\sqcup\quad\sqcup\quad\sqcup\quad\cdots\quad\sqcup}_{k-1\text{ bloques}}\qquad \boxed{n}$$

Al dibujar el bloque que contiene a n como el último no estamos suponiendo ningún orden entre los bloques. Lo único que hacemos es identificar el bloque que contiene a n (y que no contiene nada más). Pero ahora que sabemos que el elemento n va en un bloque (y por su cuenta), lo que tenemos que hacer es decidir el resto; esto es, tenemos que construir una partición del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ bloques no vacíos. Así que las recetas "quitar el bloque $\{n\}$" o "añadir el bloque $\{n\}$" nos proporcionan el diccionario (la biyección) que nos permite concluir que hay tantas particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques de manera que el elemento n vaya solo en un bloque como particiones de $\{1,\dots,n-1\}$ en $k-1$ bloques no vacíos. Esto es, hay $S(n-1,k-1)$ de ellas.

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ *El bloque que contiene a n tiene, además, otros elementos.* ¿Podremos contar con la misma receta? Veamos un ejemplo: sea $\mathcal{X}=\{1,2,3,4\}$ y $k=2$. Las particiones que nos interesan son tales que el bloque que contiene al 4 tiene, además, otros elementos. Dos de ellas, distintas, serían

$$\{1,2\}\cup\{3,4\} \qquad \text{y} \qquad \{3\}\cup\{1,2,4\}.$$

Ahora no podemos hablar de "quitar el bloque $\{4\}$", pero aún podríamos intentar una receta del tipo "quitar el elemento 4". Pero vemos que ésta no es una buena receta, porque

$$\left.\begin{array}{ccc} \{1,2\}\cup\{3,4\} & \longrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\} \\ \{3\}\cup\{1,2,4\} & \longrightarrow & \{1,2\}\cup\{3\} \end{array}\right] \longrightarrow \text{¡dan lugar a la misma partición!}$$

Aún así, esto nos proporciona la idea que nos permitirá resolver la cuestión. Pensemos en el proceso al revés, "añadir 4". Si tenemos la partición de $\{1,2,3\}$ en dos bloques, podemos situar el símbolo 4 en cualquiera de los dos bloques para dar lugar a una partición de $\{1,2,3,4\}$ en dos bloques de manera que el 4 esté acompañado:

$$\{1,2\}\cup\{3\} \longrightarrow \begin{cases} \{1,2,4\}\cup\{3\} \\ \{1,2\}\cup\{3,4\} \end{cases}$$

Y lo importante es que sigue habiendo dos bloques, dos posibles emplazamientos del símbolo 4.

Hagamos el argumento en general: tenemos las $S(n-1,k)$ particiones del conjunto $\{1,\dots,n-1\}$ en k bloques. Y para cada una de ellas, añadimos el elemento n; tendremos k posibilidades para colocarlo:

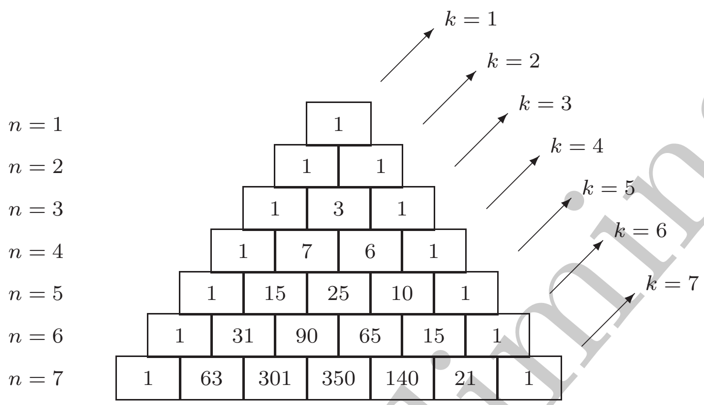
$$\underbrace{\{\cdots\}\{\cdots\}\cdots\{\cdots\}}_{k\text{ bloques}} \quad\longrightarrow\quad \begin{cases} \{\dots,n\}\{\cdots\}\cdots\{\cdots\} \\ \{\cdots\}\{\dots,n\}\cdots\{\cdots\} \\ \qquad\vdots \\ \{\cdots\}\{\cdots\}\cdots\{\dots,n\} \end{cases}$$

Sólo queda convencerse de que con este procedimiento tenemos todas las particiones de $\{1,\dots,n\}$ en k bloques en las que el símbolo n está acompañado para concluir que, como hemos establecido una aplicación k a 1, hay $k\,S(n-1,k)$ particiones de este segundo tipo.

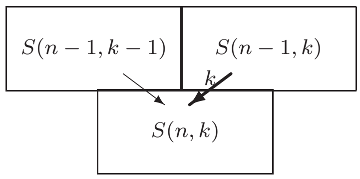
Así que ya tenemos la regla de recursión que buscábamos:

$$\boxed{S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\,S(n-1,k)}$$

Con esta regla y los valores frontera tenemos codificada toda la información sobre estos números de Stirling de segunda especie; y podemos construir el análogo al triángulo de Pascal.



Observemos que ya no tiene la simetría que presentaba el triángulo de los coeficientes binómicos. La regla de recursión se interpreta, gráficamente, como aparece a la derecha, donde la flecha de la izquierda, más oscura, nos indica que no hay que sumar el número de Stirling, multiplicado por su valor de k.



Los valores de los números de Bell $B(n)$ se obtienen, por supuesto, sumando en cada fila. También hay para ellos una relación de recursión (véase el ejercicio 3.3.4).

Números de Stirling y aplicaciones sobreyectivas

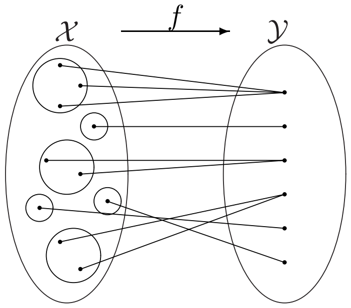
Una interpretación alternativa de los números $S(n,k)$ tiene relación con el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en uno de k elementos. Cuando establezcamos esta relación, encontraremos, además, una fórmula explícita para $S(n,k)$, aprovechando que ya en el ejemplo 3.1.8 obtuvimos, vía el principio de inclusión/exclusión, una fórmula que contaba el número de aplicaciones sobreyectivas.

Sean dos conjuntos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ con tamaños $|\mathcal{X}|=n$ y $|\mathcal{Y}|=k$; supongamos, como siempre, que $\mathcal{X}=\{1,\dots,n\}$ e $\mathcal{Y}=\{1,\dots,k\}$. Ya vimos que el número de aplicaciones sobreyectivas entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ era

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n\,.$$

Ahora construyamos este tipo de aplicaciones de una forma distinta. La primera observación es que una aplicación *cualquiera* define una partición del conjunto $\mathcal{X}$: en cada bloque de la partición estarán los elementos de $\mathcal{X}$ que tengan imagen común.

Pero si además la aplicación es sobreyectiva (es decir, todo elemento $y\in\mathcal{Y}$ tiene un conjunto de preimágenes no vacío), entonces sabemos de cuántos bloques consta la partición: exactamente k, tantos como elementos tenga $\mathcal{Y}$.



Con esta idea en mente, construyamos las aplicaciones sobreyectivas de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ con el siguiente procedimiento: (1) partimos primero el conjunto $\mathcal{X}$ en k bloques no vacíos. Esto se puede hacer de $S(n,k)$ maneras distintas. (2) Ahora sólo queda decidir a qué elemento de $\mathcal{Y}$ hacemos corresponder cada uno de estos k bloques; esto es, tenemos que ordenar estos k bloques, permutarlos. Y sabemos que hay $k!$ maneras de hacerlo.

Así que, en total, hay $k!\,S(n,k)$ aplicaciones sobreyectivas de $\{1,\dots,n\}$ en $\{1,\dots,k\}$. Si comparamos con el resultado que obteníamos con el principio de inclusión/exclusión, llegamos a la fórmula para los $S(n,k)$ que buscábamos:

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n}\,.$$

O, si queremos, en una formulación alternativa,

$$S(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!}\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}m^n\,,$$

que se puede obtener sin más que cambiar el índice de sumación (de j pasamos a $m=k-j$) y utilizar las propiedades de los coeficientes binómicos.

En términos de bolas en cajas, $S(n,k)$ contaba el número de distribuciones de n bolas numeradas en k cajas idénticas (sin cajas vacías). Ahora vemos que $k!\,S(n,k)$ cuenta el número de distribuciones de n bolas numeradas en k cajas numeradas (sin cajas vacías).

Calculemos, utilizando la fórmula anterior, $S(n,2)$:

$$S(n,2) = \frac{(-1)^2}{2!}\sum_{m=0}^{2}(-1)^m\binom{2}{m}m^n = \frac{1}{2}\left[0-\binom{2}{1}+\binom{2}{2}2^n\right] = \frac{2^n-2}{2}\,,$$

como ya sabíamos (véase el ejemplo 3.3.3).

Si ahora nos interesamos por el número $S(n,n-1)$, la fórmula nos da

$$S(n,n-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\binom{n-1}{m}m^n\,.$$

Toda esta complicada suma vale, recordando el ejemplo 3.3.2, simplemente... $\binom{n}{2}$.

Ejemplo 3.3.4 *Una identidad para los números de Stirling de segunda especie.*

Aún podemos extraer más información de esta relación con las aplicaciones. Si $\mathcal{X}$ tienen n elementos e $\mathcal{Y}$ tiene k, sabemos que en total hay k^n aplicaciones de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$. Podemos construirlas de la siguiente manera: las imágenes de los elementos de $\mathcal{X}$ son una serie de elementos de $\mathcal{Y}$, digamos j de ellos, donde $1\le j\le k$ (el resto no tendrá preimagen). Entonces,

1. decidimos qué elementos de $\mathcal{Y}$ tienen preimágenes. Lo podremos hacer de $\binom{k}{j}$ maneras. El resto no tiene nada que decir a partir de ahora.
2. Una vez que hemos decidido a qué j elementos "llega" la aplicación, sólo resta construir una aplicación sobreyectiva a estos j elementos.

Con este proceso hemos probado la siguiente identidad:

$$\boxed{k^n = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}\, j!\, S(n,j)}$$

En esta identidad podemos cambiar el límite superior de sumación a n (también podemos poner $\text{mín}(n,k)$, o incluso $+\infty$, por la presencia del coeficiente binómico).

Ahora observemos que, para n fijo,

$$k^n = \sum_{j=1}^{n} k(k-1)\cdots(k-j+1)\, S(n,j) \qquad \text{para todo } k \geq 1.$$

De esto se deduce que

$$x^n = \sum_{j=1}^{n} x(x-1)\cdots(x-j+1)\, S(n,j) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

pues se trata de dos polinomios de grado n que coinciden en todos los enteros (sobre estas cuestiones de polinomios volveremos en la sección 4.6). Usaremos esta expresión más adelante (véase la página 187). ♣

3.3.2. Descomposición de permutaciones en ciclos

Ahora trabajaremos con permutaciones de un conjunto con n elementos, el habitual $\{1,\dots,n\}$. Ya sabemos que toda permutación se puede descomponer en ciclos de forma única (con las salvedades de escritura habituales). En principio, el número de ciclos que puede tener una permutación es cualquier número entre 1 (las permutaciones cíclicas) y n (por ejemplo, la permutación identidad). Y la pregunta natural es: ¿cuántas permutaciones tienen un número determinado de ciclos? Llamemos

$$z(n,k) = \#\left\{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ que tienen exactamente } k \text{ ciclos}\right\}.$$

A estos números se les suele llamar números de Stirling (sin signo) de primera especie. Por razones históricas[18], los **números de Stirling de primera especie**, $s(n,k)$, se definen de una forma un poco diferente: $s(n,k)$ es el número tal que

$$(-1)^{n-k}\, s(n,k) = \#\left\{\text{permutaciones de } \{1,\dots,n\} \text{ que tienen exactamente } k \text{ ciclos}\right\},$$

de manera que pueden tomar valores negativos.

[18] Véase la página 187.

En principio, los rangos de parámetros que consideraremos serán $n \geq 1$ y $k \geq 1$. Por unificar la notación, trabajaremos con los $s(n,k)$, aunque todas las expresiones que obtendremos tienen una sencilla traducción a los números $z(n,k)$ arriba definidos sin más que eliminar los posibles signos: $z(n,k) = |s(n,k)|$.

La primera observación que podemos hacer sobre estos números de Stirling es que, como hay $n!$ permutaciones en total, para cada $n \geq 1$,

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^{n-k} s(n,k) = \sum_{k\geq 1} |s(n,k)| = n!\,.$$

Como no hay permutaciones que tengan más ciclos que número de elementos tenga el conjunto $\mathcal{X}$, diremos que, dado $n \geq 1$,

$$s(n,k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

Así que podremos representar estos números de Stirling de primera especie en un triángulo a la Tartaglia.

Busquemos, como en los casos anteriores, los valores de la frontera de este triángulo, y una regla de recurrencia. Si $k = n$, la única permutación que tiene tantos ciclos como elementos hay es la identidad:

$$s(n,n) = 1\,, \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

El otro caso extremo sería considerar $k = 1$. Las permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ que son, ellas mismas, un ciclo, las llamábamos permutaciones cíclicas, y ya sabemos (véase la página 162) que hay $(n-1)!$ de ellas. Así que, para cada $n \geq 1$,

$$s(n,1) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,.$$

Ya tenemos los valores en la frontera, y ahora buscaremos la regla de recurrencia.

Démonos un conjunto de n elementos, digamos $\{1,\dots,n\}$, y consideremos todas las permutaciones de este conjunto que tienen exactamente k ciclos. El argumento es análogo al que empleábamos para los números $S(n,k)$: nos vamos a fijar en la posición que ocupa un elemento especial, n.

- Si n forma un ciclo por sí mismo, entonces, al quitarlo, nos queda una permutación de $\{1,\dots,n-1\}$ con exactamente $k-1$ ciclos.
- El otro caso es cuando n forme parte de un ciclo junto con otros elementos. Al quitar n, y pasar a permutaciones de $\{1,\dots,n\}$, no cambiará el número de ciclos. Pero, como para los $S(n,k)$, encontramos algún problema: por ejemplo, si quitamos el 4,

$$\circlearrowleft_4(3,\,2) \circ \circlearrowleft_4(1,\,4) \quad \xrightarrow{\text{da lugar a}} \quad \circlearrowleft_3(3\,2)\circlearrowleft_3(1)$$

$$\circlearrowleft_4(3,\,2,\,4) \circ \circlearrowleft_4(1) \quad \xrightarrow{\text{da lugar a}} \quad \circlearrowleft_3(3\,2)\circlearrowleft_3(1)$$

  Conviene aquí pensar "al revés", aunque el argumento también podría ser directo. Partimos de una permutación de $\{1,\dots,n-1\}$ con k ciclos, que tendrá un aspecto semejante a

$$\circlearrowleft_{n-1}(a_1^1,\dots,a_s^1) \circ \circlearrowleft_{n-1}(a_1^2,\dots,a_t^2) \circ \dots \circ \circlearrowleft_{n-1}(a_1^k,\dots,a_u^k)\,.$$

Queremos añadir el elemento n sin que se formen nuevos ciclos, y tenemos $n-1$ lugares donde colocarlo (los $n-1$ "huecos" entre los a_j), sea cual sea la permutación que hayamos considerado. Así que, por cada permutación de $\{1,\dots,n-1\}$ con k ciclos, obtenemos $n-1$ permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ con k ciclos en las que n esté "acompañado".

Con todo esto, ya podemos escribir que

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{permutaciones}\\ \text{de } \{1,\dots,n\}\\ \text{con } k \text{ ciclos}\end{array}\right\} = (n-1)\,\#\left\{\begin{array}{c}\text{permutaciones}\\ \text{de } \{1,\dots,n-1\}\\ \text{con } k \text{ ciclos}\end{array}\right\} + \#\left\{\begin{array}{c}\text{permutaciones}\\ \text{de } \{1,\dots,n-1\}\\ \text{con } k-1 \text{ ciclos}\end{array}\right\}$$

lo que nos daría la relación de recurrencia

$$z(n,k) = (n-1)\,z(n-1,k) + z(n-1,k-1)\,.$$

En términos de los números de Stirling de primera especie,

$$\boxed{s(n,k) = -(n-1)\,s(n-1,k) + s(n-1,k-1)}$$

Con esta regla y los valores frontera, podemos el triángulo de los $s(n,k)$:

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=1$	1					
$n=2$	-1	1				
$n=3$	2	-3	1			
$n=4$	-6	11	-6	1		
$n=5$	24	-50	35	-10	1	
$n=6$	-120	274	-225	85	-15	1

Los valores de $z(n,k)$ se leen, simplemente, quitando el signo en los valores del triángulo.

Relación entre los números de Stirling de primera y segunda especie*

Nota: Avisamos al lector de que este apartado requiere cierta familiaridad con los conceptos de espacios vectoriales y bases.

El origen de las familias de números $S(n,k)$ y $s(n,k)$ no tiene el sabor combinatorio que aquí les estamos dando: particiones de conjuntos en bloques y particiones de permutaciones en ciclos. Stirling estaba interesado en otras cuestiones, de tipo más algebraico.

Recordemos, del ejemplo 3.3.4, la siguiente identidad:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x(x-1)\cdots(x-k+1)\,.$$

Por comodidad, tomamos el límite inferior de sumación como 0. Para ello, es conveniente definir $S(n,0)=0$ para cada $n\geq 1$, pero $S(0,0)=1$.

Los números de Stirling de primera especie verifican una relación que recuerda vagamente a la anterior:

$$x\,(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k\,.$$

Aquí, de nuevo, conviene definir $s(n,0)=0$ para cada $n\geq 1$ y $s(0,0)=1$. Es un ejercicio sencillo de aplicación del principio de inducción probar esta identidad (véase el ejercicio 3.3.7). Volveremos a encontrarnos con esta identidad cuando tratemos las funciones generatrices exponenciales (véase el ejemplo 13.3.2) y la Teoría de Pólya (véase el capítulo 14).

El espacio de los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales es un espacio vectorial (de dimensión infinita, pero numerable). Podemos tomar como base de este espacio vectorial la *base estándar*, dada por

$$B_1 = \big\{x^k\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}\,,$$

que es la se usa habitualmente y la que se utiliza en la definición de polinomio como una combinación lineal de potencias de x.

Pero en realidad cualquier colección de polinomios en la que cada uno tenga uno de los grados posibles valdría también como base. Por ejemplo, la *base de los factoriales decrecientes*,

$$B_2 = \big\{x(x-1)\cdots(x-k+1)\big\}_{k=0}^{\infty} = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2), \dots\}\,.$$

Las expresiones

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)\, x(x-1)\cdots(x-k+1) \qquad \text{y} \qquad x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k) x^k$$

son, simplemente, las reglas para pasar de una base a la otra. La de la izquierda cambia de la base de los factoriales decrecientes a la estándar (por eso Stirling llamó a los $S(n,k)$ números de segunda especie), mientras que la de la derecha hace el cambio inverso (y los números de $s(n,k)$ son de primera especie).

Llamemos S_1 a la matriz (infinita) cuyas entradas son los $s(n,k)$, para cada valor de n y k, y S_2 a la matriz infinita formada por los $S(n,k)$. La matriz S_1 es la matriz de cambio de base de B_2 a B_1; mientras que S_2 cambia de B_1 a B_2. Pero esto quiere decir que las dos matrices son inversas una de la otra,

$$S_1\, S_2 = S_2\, S_1 = I\,,$$

donde I representa a la matriz identidad (infinita). Por ejemplo, para el producto $S_1\,S_2$, al multiplicar la fila n de S_1 por la columna k de S_2 obtenemos el elemento (n,k) de la matriz identidad. Al escribir esto obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,s(k,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=j, \\ 0 & \text{si } n\neq j. \end{cases}$$

Una expresión análoga (cambiando los papeles de los números de Stirling) se puede obtener[19] considerando el producto $S_2\,S_1$. Lo interesante de estas expresiones es que permiten obtener una fórmula de inversión:

Teorema 3.3 *Si f y g son dos funciones definidas en $\mathbb{N}$ y relacionadas por*

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\,g(k)\,,$$

entonces

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,f(k)\,.$$

Y recíprocamente.

DEMOSTRACIÓN. Probemos la primera implicación (la otra sigue argumentos similares). Supongamos que

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\,g(k)\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,f(k) &= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\sum_{j=1}^{k} s(k,j)\,g(j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} S(n,k)\,s(k,j)\,g(j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} g(j) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} S(n,k)\,s(k,j)}_{\neq 0 \text{ sólo si } j=n} = g(n)\,, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

[19] De hecho, ambas expresiones se pueden obtener sustituyendo en la primera fórmula $x(x-1)\cdots(x-k+1)$ por su valor (en la segunda fórmula) e igualando coeficientes. O bien sustituyendo en la segunda x^k por su valor (de la primera) e igualando coeficientes.

3.3.3. Particiones de enteros

Ahora nos interesa contar de cuántas maneras se puede escribir un cierto entero positivo n como *suma* de enteros positivos, donde el orden de los sumandos es ahora *irrelevante*. Cada una de estas formas será lo que llamaremos una **partición** de n; y cada uno de los sumandos, una **parte**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+1+1+1 \\ 5 &= 1+1+1+2 \\ 5 &= 1+2+2 \\ 5 &= 1+1+3 \\ 5 &= 2+3 \\ 5 &= 1+4 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

Obsérvese que, por ejemplo, $5 = 2+3$ y $5 = 3+2$ representan la misma partición. Por comodidad, se suelen escribir los sumandos de menor a mayor; a veces incluso se abrevia de la siguiente forma:

$$11 = 2+2+2+2+3 = \left[2^4\, 3\right] ,$$

donde 2^4 nos recuerda que hay que sumar cuatro doses.

Démosle nombre a las cantidades de interés: primero,

$$p(n) = \#\{\text{particiones de } n\} .$$

En nuestro análisis consideraremos unas particiones especiales, las particiones de n que tienen *exactamente* k partes; al número de ellas lo llamaremos $p_k(n)$. Obviamente, se cumple que

$$p(n) = \sum_{k\geq 0} p_k(n)$$

(en realidad el sumatorio sólo va desde 1 a n). Por ejemplo, $p(5) = 7$, mientras que $p_3(5) = 2$. En general, cuando queramos contar el número de particiones de n que cumplan una determinada propiedad, escribiremos

$$p(n \,|\, \text{la partición cumple cierta propiedad})$$

Así, por ejemplo, los $p_k(n)$ que acabamos de introducir corresponden a

$$p_k(n) = p(n \,|\, \text{el número de partes es exactamente } k) .$$

Contar el número de particiones de un entero n, o el número de particiones con ciertas características es un problema difícil; las funciones generatrices son la manera habitual y más eficaz de tratar el problema (las usaremos en la sección 10.7). Para esta primera aproximación al problema nos limitaremos a utilizar argumentos de tipo combinatorio (a veces, muy ingeniosos).

Las particiones de un entero n nos recuerdan a lo que llamábamos composiciones de n (véase la subsección 3.1.3). Se diferencian de ellas en que ahora el orden de presentación de los sumandos no es relevante, pero quizás nos puedan ser útiles. Veamos el ejemplo de $n = 5$:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Particiones de 5} & & \text{Composiciones de 5} \\
1+1+1+1+1 & \longleftrightarrow & 1+1+1+1+1 \\
1+1+1+2 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 1+1+1+2 \\ 2+1+1+1 \\ 1+2+1+1 \\ 2+1+1+1 \end{array}\right\} \\
1+2+2 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 1+2+2 \\ 2+1+2 \\ 2+2+1 \end{array}\right\} \\
2+3 & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} 2+3 \\ 3+2 \end{array}\right\}
\end{array}$$

Pero no parece sencillo encontrar el diccionario entre estos dos problemas: el número de composiciones que corresponde a cada partición depende (y no queda claro de qué manera) de la partición en sí.

Estimaciones de tamaño

Una vez que ha fracasado nuestro primer acercamiento a la cuestión, nos ponemos menos ambiciosos y nos planteamos estimar el orden de magnitud de, por ejemplo, los números $p_k(n)$.

Obsérvese, antes de nada, que $p(n)$ crece con n: a toda partición de $n-1$ se le puede añadir un 1 para obtener una de n (así que de n al menos hay tantas particiones como de $n-1$). Y lo mismo ocurre para $p_k(n)$ (si fijamos k) porque, dada una partición de n, digamos

$$n = a_1 + \cdots + a_k\,,$$

entonces, por ejemplo, $(a_1+1) + \cdots + a_k$ es una partición de $n+1$ (con el mismo número de sumandos). Obsérvese que este procedimiento no siempre crea el mismo número de nuevas particiones. Por ejemplo, a partir de $4 = 2+2$ obtendríamos sólo $5 = 2+3$, mientras que a partir de $4 = 1+3$ podríamos obtener $5 = 2+3$ y también $5 = 1+4$.

Recuperemos el (aparentemente inútil) acercamiento al problema en términos de las composiciones de n. Desde luego, fijados n y el número de sumandos k, al menos hay tantas composiciones como particiones (recordemos que en las composiciones cuenta el orden). Por ejemplo, para $n = 3$ y $k = 2$, hay una partición $(1+2)$ y dos composiciones $(1+2$ y $2+1)$. En general,

$$p_k(n) \leq \binom{n-1}{k-1}\,.$$

No está mal, pero podemos mejorarla, con un argumento más fino. Observemos que, en el ejemplo numérico anterior, a la partición $2+3$ le corresponden exactamente tantas composiciones (dos) como permutaciones de los sumandos (porque todos estos sumandos eran distintos). Con esta idea en mente, consideremos las particiones de n en k partes. Este conjunto tiene exactamente el mismo tamaño que el conjunto de soluciones de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \\ 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \end{cases}$$

Obsérvese que, para evitar escribir la misma partición varias veces, ordenamos (por ejemplo de menor a mayor) los k términos. Sobre esta relación entre particiones y soluciones de ecuaciones diofánticas profundizaremos en la sección 10.7. Compare el lector el tipo de restricciones sobre las variables que aquí aparecen con las que obteníamos con la relación análoga de composiciones y ecuaciones diofánticas (véase la subsección 3.1.3): allí eran del tipo $x_j \geq a_j$, donde los números a_j eran *fijos*. Aquí, la cota sobre un x_j particular depende de los valores que asignemos a las restantes variables.

Si ahora hacemos el cambio de variables

$$\widetilde{x}_i = x_i + (i-1)\,, \qquad \text{para cada } 1 \leq i \leq k$$

(un cambio análogo al que hicimos la subsección 3.1.8, al comparar multiconjuntos y composiciones), los números $\tilde{x}_i$ mantienen el mismo orden que tenían los x_i, pero son ahora todos distintos (los hemos "separado"). La suma de estos nuevos números vale

$$\sum_{i=1}^{k} \widetilde{x}_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i + i - 1) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} (i-1) = n + \sum_{j=0}^{k-1} j = n + \frac{k(k-1)}{2}\,.$$

Así que $p_k(n)$, que antes veíamos que coincide con el número de soluciones $(x_1, \dots, x_k)$ del problema de arriba, resulta ser también igual, tras esta biyección/cambio de variables, que el número de soluciones de

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \cdots + \widetilde{x}_k = n + k(k-1)/2 \\ \widetilde{1} \leq x_1 < \widetilde{x}_2 < \cdots < \widetilde{x}_k \end{cases}$$

Por ejemplo, del entero 6 hay tantas particiones con tres sumandos como soluciones tenga

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \end{cases}$$

Hay tres de estas particiones; las escribimos a la izquierda, y a la derecha escribimos su traducción en términos de las $\widetilde{x}_i$ (al valor de x_1 hay que sumarle 2, al de x_2 le sumamos 1, y x_3 lo dejamos como está):

$$\begin{array}{rcccc c rcccc}
 & x_1 & & x_2 & & x_3 & & & \widetilde{x}_1 & & \widetilde{x}_2 & & \widetilde{x}_3 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
6 = & 1 & + & 1 & + & 4 & & 9 = & 1 & + & 2 & + & 6 \\
6 = & 1 & + & 2 & + & 3 & \longleftrightarrow & 9 = & 1 & + & 3 & + & 5 \\
6 = & 2 & + & 2 & + & 2 & & 9 = & 2 & + & 3 & + & 4
\end{array}$$

Pero ahora, como las $\widetilde{x}_i$ son todas distintos, cada permutación de una lista solución $(\widetilde{x}_i, \dots, \widetilde{x}_k)$ genera una composición distinta de $n + k(k-1)/2$ con tamaño k. En el ejemplo, la partición de 9 dada por $1+2+6$ da lugar a las $3! = 6$ composiciones de 9 siguientes:

$$1+2+6\,, \quad 1+6+2\,, \quad 2+1+6\,, \quad 2+6+1\,, \quad 6+1+2\,, \quad 6+2+1\,.$$

Pero por supuesto no están todas (por ejemplo, la composición de 9 dada por $3+3+3$ no la podemos obtener de esta manera), así que

$$k!\, p_k(n) \le \binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1} \implies p_k(n) \le \frac{1}{k!}\binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

No queda claro, por el aspecto, si esta nueva estimación es mejor que la que obteníamos antes. Se requieren algunos cálculos con límites (véase el ejercicio 3.3.8) para comprobar que tenemos una mejora de, esencialmente, un factor $1/k!$ extra.

Para completar este análisis del tamaño de $p_k(n)$, buscaremos ahora cotas por debajo. Lo vamos a hacer con el argumento más simple posible: dada una partición, podemos permutar sus k sumandos partición para obtener composiciones (aunque, por supuesto, no todas ellas serán distintas). Por ejemplo, la partición $5 = 1+2+2$, que tiene tres sumandos, daría lugar, en principio, a $3! = 6$ posibles ordenaciones de los sumandos de las que, en realidad, sólo hay tres composiciones distintas, $1+2+2$, $2+1+2$ y $2+2+1$. No es una estimación muy precisa, pero va justo en el sentido que queremos:

$$k!\, p_k(n) \ge \binom{n-1}{k-1} \quad \implies \quad p_k(n) \ge \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Ahora reunimos toda la información y concluimos que

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \le p_k(n) \le \frac{1}{k!}\binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

Estas acotaciones, válidas para todo n y para cada $k = 1, \dots, n$, aunque no sean muy precisas, son suficientes para obtener, utilizando la fórmula de Stirling,que, para k fijo,

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!} \quad \text{cuando } n \to \infty$$

(véase el ejercicio 3.3.9 para los detalles).

Diagramas de Ferrers y recursión

Los **diagramas de Ferrers** son una manera muy útil y visual de representar una partición de n. Se trata de dibujar tantas filas como sumandos tenga la partición y en cada fila colocar tantos símbolos (digamos $\times$) como nos diga el tamaño del sumando en cuestión (los colocaremos en orden inverso de tamaños). Por ejemplo,

$$9 = 1 + 3 + 5 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \times\times\times\times\times \\ \times\times\times \\ \times \end{array} \qquad 9 = 1 + 1 + 1 + 3 + 3 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \times\times\times \\ \times\times\times \\ \times \\ \times \\ \times \end{array}$$

Con estos diagramas de Ferrers podemos probar gráficamente varios resultados sobre particiones y, en particular, obtener diversas fórmulas de recurrencia que faciliten el cálculo de los números $p_k(n)$. El siguiente resultado es clave en todo esto:

Teorema 3.4 *Dado $n \geq 1$ y un entero k entre 1 y n,*

$$p(n \,|\, \textit{con no más de } k \textit{ partes}) = p(n + k \,|\, \textit{con } k \textit{ partes})$$

(la cantidad de la derecha es lo que hemos dado en llamar $p_k(n + k)$).

Demostración. Vamos a establecer una biyección entre los dos conjuntos de particiones.

$$k \text{ filas} \left\{ \begin{array}{l} \times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \times\times \\ \times \\ \times \end{array} \right.$$

Si tenemos una partición de $n + k$ con k partes, su diagrama de Ferrers tendrá k filas (y $n + k$ símbolos en total). Si borramos la primera columna, obtenemos el diagrama de Ferrers de una partición de n (hemos borrado k símbolos $\times$) que tiene, a lo sumo, k partes (el peor caso es que no hubiera unos en la partición, de forma que al eliminar la primera columna no haríamos desaparecer ninguna fila).

En el otro sentido la situación es la misma: dada un partición de n con no más de k partes, al añadir una primera columna de k símbolos, obtenemos una partición de $n + k$ con exactamente k partes. ■

Teorema 3.5 (primera regla de recurrencia) *Dado $n \geq 1$ y un entero k entre 1 y n,*

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{k} p_j(n - k)\,.$$

Demostración. Del teorema anterior sabemos que

$$p_k(n) = p(n \,|\, k \text{ partes}) = p(n - k \,|\, \text{no más de } k \text{ partes})\,.$$

Y si clasificamos las particiones de $n-k$ con no más de k partes según el número de sumandos de que consten, terminamos la demostración:

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^{k} p(n - k \,|\, \text{exactamente } j \text{ partes}) = \sum_{j=1}^{k} p_j(n - k)\,.$$

■

Lo interesante de este resultado es que es una auténtica regla de recurrencia, porque permite calcular el valor de $p_k(n)$ si conocemos ciertos valores del número de particiones con parámetros más bajos (particiones de $n-k$ y número de sumandos hasta k). Pero, como siempre, necesitaremos unos valores frontera:

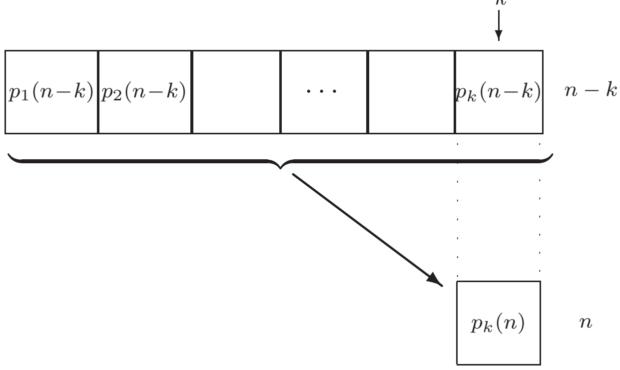
- $k=1$ supone partir n en un único sumando. Sólo hay una manera de hacerlo, claro, luego $p_1(n)=1$, para cada n.

- El caso $k=n$ exige partir n en n sumandos; y sólo hay una manera de hacerlo, sumar n unos. Luego $p_n(n)=1$.

Con estos valores frontera y la regla de recurrencia, podemos ir generando todos los valores de $p_k(n)$ (y sumando en filas, los correspondientes $p(n)$):

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11	k=12	k=13	k=14	
$n=1$	1														$p(1)=1$
$n=2$	1	1													$p(2)=2$
$n=3$	1	1	1												$p(3)=3$
$n=4$	1	2	1	1											$p(4)=5$
$n=5$	1	2	2	1	1										$p(5)=7$
$n=6$	1	3	3	2	1	1									$p(6)=11$
$n=7$	1	3	4	3	2	1	1								$p(7)=15$
$n=8$	1	4	5	5	3	2	1	1							$p(8)=22$
$n=9$	1	4	7	6	5	3	2	1	1						$p(9)=30$
$n=10$	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1					$p(10)=42$
$n=11$	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1				$p(11)=56$
$n=12$	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1			$p(12)=77$
$n=13$	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1		$p(13)=101$
$n=14$	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1	$p(14)=135$

Arranca bien, la sucesión de los números $p(n)$, generando los primeros números primos hasta $n=6$; pero luego, ¡qué pena!, ya no funciona la regla. La interpretación gráfica de la recurrencia es la que aparece en el esquema de la derecha: para calcular $p_k(n)$ sumaremos los primeros k valores de los que están en la fila $n-k$:



Aún podemos obtener una ecuación de recurrencia más cómoda. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.3.5 *Como $p_3(10) = 8$, del entero 10 tendremos ocho particiones con tres partes.*

Las ocho particiones son

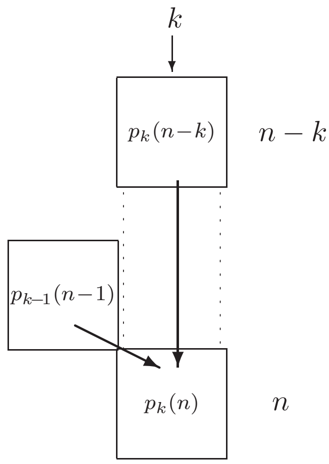
$$\begin{array}{cc} 1+1+8 & 2+2+6 \\ 1+2+7 & 2+3+5 \\ 1+3+6 & 2+4+4 \\ 1+4+5 & 3+3+4 \end{array}$$

Queremos relacionarlas, en principio, con particiones (quizás de enteros menores que 10) pero que tengan menos partes. Observemos que hacer eso con las cuatro de la izquierda es trivial: basta quitar un sumando 1 de cada una de ellas para obtener particiones de 9 con únicamente 2 partes. Un poco más problemáticas son las cuatro de la derecha, las que no tienen unos. Quitar un sumando ya no es una regla adecuada: ¿cuál quitamos, un 2, un 3? Nos quedarían particiones a veces de 8, a veces de 7. Pero tenemos una ventaja: estas particiones no tienen unos, así que con seguridad podremos restar una unidad (digamos, al sumando más pequeño) y seguiremos teniendo una partición legal (de 9, en este caso). ♣

Ésta es la idea del siguiente resultado:

Teorema 3.6 (segunda regla de recurrencia) *Dado $n \geq 1$ y un entero k entre 1 y n,*

$$\boxed{p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)}$$



Demostración. Observemos primero la interpretación gráfica de esta recurrencia (sobre la tabla de la página anterior); es la que aparece en la figura de la derecha. Comparándola con la de la otra regla de recurrencia, nos damos cuenta de que, en realidad, esta regla de recurrencia se deduce de la anterior: el valor de $p_{k-1}(n-1)$ es la suma de los $p_j(n-k)$ de índices j menores que k. Más formalmente,

$$\begin{aligned} p_k(n) &= \sum_{j=1}^{k} p_j(n-k) = p_k(n-k) + \sum_{j=1}^{k-1} p_j(n-k) \\ &= p_k(n-k) + \sum_{j=1}^{k-1} p_j\big((n-1)-(k-1)\big) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-1)\,, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado, en dos ocasiones, la regla de recurrencia del teorema 3.5. El lector puede entretenerse en probar este resultado a partir, directamente, de los diagramas de Ferrers (por ejemplo, distinguiendo entre las particiones de n con k partes que contengan unos de las que no). ♣

Si en el diagrama de Ferrers de una partición de n intercambiamos filas por columnas obtenemos otra partición de n (posiblemente la misma), porque no alteramos el número de símbolos. Hagámoslo, por ejemplo, para la partición de $n = 18$ codificada como $[1\,2\,3^2\,4\,5]$, cuyo diagrama de Ferrers aparece a la izquierda:

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & \\ \times & & & & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & & \\ \times & & & & & \end{array}$$

La partición inicial constaba de seis partes, y el mayor de estos sumandos era un 5. Ahora obtenemos una partición de 18 que tiene cinco partes y cuya parte mayor es 6, en concreto $[1\,2\,4\,5\,6]$.

En general, si en una partición λ intercambiamos filas por columnas, obtenemos una partición λ', que se denomina su **conjugada**. Esta transformación intercambia los papeles del número de partes y el tamaño de la parte mayor (como ocurría en el ejemplo). De hecho, la transformación $\lambda \longrightarrow \lambda'$ es una biyección entre las particiones de n que tienen k partes y las particiones de n cuyo mayor sumando es k; es lo que prueba el siguiente resultado:

Teorema 3.7 *Dados unos enteros positivos n y k,*

$$p(n \,|\, \textit{su mayor sumando es } k) = p(n \,|\, k \textit{ partes}) = p_k(n)\,.$$

Y, por tanto,

$$p(n \,|\, \textit{su mayor sumando es} \leq k) = p(n \,|\, \textit{no más de } k \textit{ partes})\,,$$

que ya hemos visto que coincide con $p_k(n+k)$.

Particiones con todos los sumandos distintos

De entre las múltiples particiones con restricciones que podemos considerar, unas especialmente relevantes son aquéllas que tienen todas sus partes (sus sumandos) distintos. Los primeros casos son sencillos de determinar:

n	particiones	número
1	1	1
2	2	1
3	$1+2\,,\ 3$	2
4	$1+3\,,\ 4$	2
5	$1+4\,,\ 2+3\,,\ 5$	3
6	$1+5\,,\ 2+4\,,\ 1+2+3\,,\ 6$	4
7	$1+6\,,\ 2+5\,,\ 3+4\,,\ 1+2+4\,,\ 7$	5
8	$1+7\,,\ 2+6\,,\ 3+5\,,\ 1+2+5\,,\ 1+3+4\,,\ 8$	6

Para algunos valores de n, pero no para todos (por ejemplo, sí para 3, 4 y 6, pero no para 1, 2 ó 5), la mitad de estas particiones tienen un número par de sumandos, y la otra mitad tiene un número impar de partes. Consideremos entonces, para cada $n \geq 1$, las dos siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} p_{par}(n) &= p(n \,|\, \text{número par de partes, todas distintas}) \\ p_{impar}(n) &= p(n \,|\, \text{número impar de partes, todas distintas}) \end{aligned}$$

Estamos interesados en la diferencia de estos dos números, que es 0 en los casos vistos de $n = 3, 4, 6$, y ± 1 en los demás casos enumerados. La respuesta está en el siguiente (asombroso) teorema:

Teorema 3.8

$$p_{par}(n) - p_{impar}(n) = \begin{cases} (-1)^m, & \textit{si } n = \frac{m}{2}(3m \pm 1) \quad \textit{para cierto entero } m, \\ 0, & \textit{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Demostración. Dada una partición λ de n (con todas sus partes distintas), llamemos $\alpha(\lambda)$ al tamaño del menor sumando de la partición y $\beta(\lambda)$ al número de partes que, empezando por la mayor, se diferencian de la anterior en una unidad. Gráficamente,

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \times\times\times\times\times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times\times\times\times \end{array}\right\}\beta = 3 \\ \times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \underbrace{\times\times}_{\alpha=2} \end{array}$$

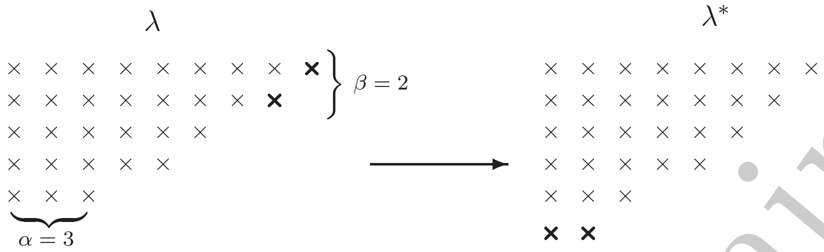
Para definir la transformación que estamos buscando, distingamos dos casos:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Démonos una partición λ de n, con todas sus partes distintas, tal que $\alpha(\lambda) \leq \beta(\lambda)$. Construimos la partición λ^* con la siguiente receta: quitamos el menor sumando de la partición λ y añadimos sus α símbolos a las α partes mayores de la partición:

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \times\times\times\times\times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times\times\times\times \end{array}\right\}\beta = 3 \\ \times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \underbrace{\boldsymbol{\times}\boldsymbol{\times}}_{\alpha=2} \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \lambda^* \\ \begin{array}{l} \times\times\times\times\times\times\times\times\times\boldsymbol{\times} \\ \times\times\times\times\times\times\times\times\boldsymbol{\times} \\ \times\times\times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times\times \\ \times\times\times\times \end{array} \end{array}$$

Lo que obtenemos así es una partición de n cuyas partes siguen siendo todas distintas; pero su número de partes se diferencia en uno del que tuviera λ (así que si la de partida tiene un número par, la de llegada lo tendrá impar, y viceversa).

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Supongamos ahora que $\alpha(\lambda) > \beta(\lambda)$. La trasformación consiste ahora en quitar los β últimos símbolos de las β mayores partes y colocarlos como un nuevo sumando (será el más pequeño). Por ejemplo, dibujemos un caso con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$:



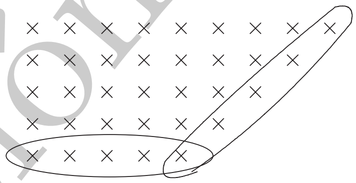
De nuevo, las paridades de λ y λ^* son distintas.

Pero hemos de ser cuidadosos antes de afirmar que las transformaciones $\lambda \to \lambda^*$ son una biyección entre los conjuntos de particiones de n (con todas las partes distintas) con un número par y un número impar de partes. Porque hay ocasiones (valores de n) en que las reglas descritas no producen particiones legales; veámoslas.

Consideremos el siguiente ejemplo: queremos partir el entero $n = 35$. Aunque por ahora no parece ser relevante, señalemos que

$$35 = \frac{\mathbf{5}}{2}\,(3 \times \mathbf{5} - 1)$$

(marcamos en negrita el 5, luego veremos por qué). Ahora consideramos una partición de 35 (con todas las partes distintas), y con $\alpha = \beta$, digamos iguales a 5:



Deberíamos aplicar la primera regla, pero obtendríamos con ella algo que no representa una partición legal de 35. Esta situación se presentará siempre que tengamos $\alpha = \beta = m$ y haya un solapamiento como el que indica el dibujo anterior. Pero ese solapamiento se produce porque hay exactamente m partes, que son m, $m+1$, …, $2m-1$. Así que se tendrá que

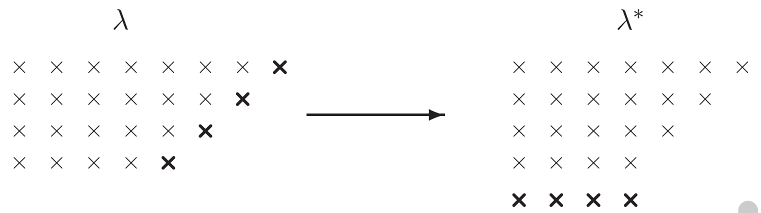
$$n = \sum_{j=0}^{m-1} (m+j) = m^2 + \sum_{j=1}^{m-1} j = m^2 + \frac{(m-1)\,m}{2} = \frac{m}{2}\,(3m-1)\,.$$

Es decir, si n se escribe como $m(3m-1)/2$, para cierto entero m (nótese que 35 es un número de éstos, con $m = 5$), entonces la regla $\lambda \to \lambda^*$ no funciona para las particiones de n que tengan $\alpha = \beta$. Queda como ejercicio para el lector que la diferencia entre las particiones con un número par y un número impar de partes es, en este caso, $(-1)^m$.

Ahora tomemos el entero 26, que se puede escribir como

$$26 = \frac{\mathbf{4}}{2}\,(3 \times \mathbf{4} + 1),.$$

Y consideremos una partición suya con $\alpha > \beta$, por ejemplo la partición λ de la figura, a la que le aplicamos la segunda regla:



Y obtenemos una partición de n que no tiene todas sus partes distintas. Pero esta situación se presenta cuando sólo cuando $\alpha = \#$ partes $+ 1$, y esas partes son $m+1, \dots, 2m$. Así que ha de ocurrir que

$$n = \sum_{j=1}^{m}(m+j) = m^2 + \sum_{j=1}^{m} j = m^2 + \frac{n\,(m+1)}{2} = \frac{m}{2}(3m+1)\,.$$

Resumiendo, la transformación $\lambda \to \lambda^*$ es una biyección entre los conjuntos que nos interesan si n no coincide con $\frac{m}{2}(3m \pm 1)$. Y en estos casos, tenemos una partición de más a uno de los lados. El que $p_{par}(n)$ y $p_{impar}(n)$ difieren en una unidad (hay un $(-1)^m$) queda como ejercicio. En todo caso, obtendremos todos estos resultados, quizás de una forma más natural, cuando hagamos el análisis con funciones generatrices. ■

Los números que aparecen en el teorema anterior,

$$\frac{m}{2}(3m \pm 1)$$

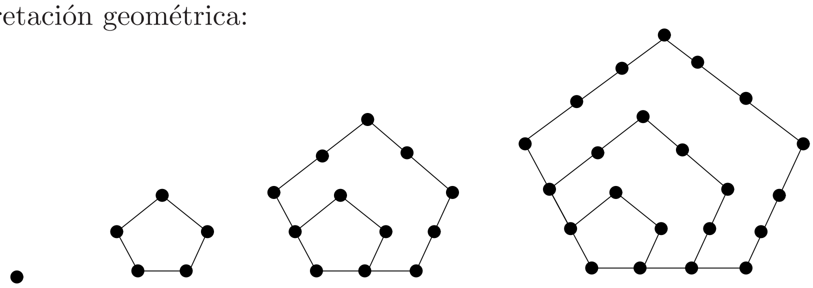
reciben un nombre especial: son los **números pentagonales**, cuyos primeros valores son

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
$\frac{m}{2}\,(3m-1)$	1	5	12	22	35	51	70
$\frac{m}{2}\,(3m+1)$	2	7	15	26	40	57	77

La explicación de este nombre, al menos para la primera fila de la tabla anterior, reside en la casi inmediata identidad

$$\omega(m) = \sum_{k=0}^{m-1}(3k+1)\,,$$

y su interpretación geométrica:



1 $\quad 1+4=5 \quad 1+4+7=12 \quad 1+4+7+10=22$

Este resultado, que involucra los números pentagonales, puede parecer sólo una curiosidad; pero veremos en su momento, cuando hagamos el análisis con funciones generatrices, que será de gran utilidad para obtener un procedimiento eficaz para calcular el valor de $p(n)$. También las funciones generatrices nos permitirán probar resultados como el siguiente (véase el teorema 10.5):

$$p(n \mid \text{ partes impares}) = p(n \mid \text{ partes distintas}),$$

nada fácil de probar con diagrama de Ferrers. Dejemos, pues, las particiones en este punto, hasta disponer de las herramientas necesarias para seguir con su tratamiento.

EJERCICIOS.

3.3.1 *Obtener una fórmula para $S(n,3)$.*

3.3.2 *Comprobar que*

$$S(n,n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}.$$

Hallar una fórmula análoga para $S(n,n-3)$.

3.3.3 *Probar que $S(n+1,m+1) = \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}S(k,m)$.*

Sugerencia. Construir primero el bloque que contiene a $n+1$.

3.3.4 *El n-ésimo número de Bell $B(n)$ cuenta el número total de particiones del conjunto $\{1,\dots,n\}$:*

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Probar que

$$B(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}B(i)\,.$$

Sugerencia. Utilizar el ejercicio anterior.

3.3.5 *Probar que $\sum_{k\geq 0} s(n,k) = 0$.*

3.3.6 *Probar que $z(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\, i!\, z(n-1,k-1)$.*

3.3.7 *Probar que $x(x-1)\cdots(x-n+1) = \sum_{k\geq 0} s(n,k)\, x^k$.*

Sugerencia. Utilizar inducción y las reglas de recurrencia para los $s(n,k)$.

3.3.8 *Para un k fijo, consideremos las dos siguientes cantidades:*

$$a_k(n) = \binom{n-1}{k-1} \quad y \quad b_k(n) = \frac{1}{k!}\binom{n - \frac{k\,(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

Comprobar que $\lim_{n\to\infty}[a_k(n)/b_k(n)] = k!$.

3.3.9 *Demostrar que, para k fijo,*

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!\,(k-1)!}\,.$$

3.3.10 *Si una partición λ coincide con su conjugada, se dice, por supuesto, que es* ***autoconjugada****. Probar que $p(n|autoconjugadas) = p(n|con\ partes\ distintas\ e\ impares)$.*

Sugerencia. Observar que, en una partición autoconjugada, la primera fila y columna de su diagrama de Ferrers tienen el mismo número de elementos, digamos k; y que tienen un elemento en común. Así que, en total, las primeras fila y columna contienen un número impar, $2k-1$, de símbolos. Si ahora eliminamos todos estos elementos, vuelve a ocurrir lo mismo.

3.4. Distribuciones de bolas en cajas

Una gran cantidad de cuestiones combinatorias pueden ser descritas en términos de bolas en cajas. Así que conviene tener a mano un vademécum que incluya los principales casos, clasificados en función de si las bolas y las cajas son distinguibles o no (incluyendo, además, las restricciones sobre la distribución más habituales).

Las bolas serán los objetos que distribuiremos en las cajas, y supondremos que dentro de las cajas el orden no es relevante. En los ejercicios de esta sección hemos incluido, además, algunas preguntas sobre distribuciones de bolas en *tubos* (cajas en cuyo interior el orden es también relevante).

En todo lo que sigue, los parámetros n y k serán enteros positivos. Usaremos los términos "idénticas" y "no numeradas" cuando los objetos de interés (quizás las bolas, quizás las cajas) sean indistinguibles. Cuando sean distinguibles, también utilizaremos los términos "numeradas" y "distintas".

1. Bolas idénticas, cajas numeradas

Tenemos n bolas idénticas, que queremos distribuir en k cajas numeradas. Una distribución de éstas se puede codificar como una lista de números $(x_1, \dots, x_k)$ cuya suma vale

$$x_1 + \cdots + x_k = n\,.$$

En principio, la única restricción sobre los x_j es que sean enteros no negativos.

Esta cuestión sobre el número de soluciones de ecuaciones diofánticas ya la analizamos con detalle en la subsección 3.1.3, donde el lector podrá revisar los detalles de los argumentos que justifican las respuestas de este apartado. Los casos más relevantes eran:

- si no permitimos que queden cajas vacías (esto es, los x_j han de ser ≥ 1). Obsérvese que si $n < k$, no hay ninguna distribución posible. Pero si $n \geq k$, el número de distribuciones posibles es
$$\binom{n-1}{k-1}$$
- En el caso general, en que permitimos que alguna caja pudiera quedar vacía, las restricciones son $x_j \geq 0$. Entonces k puede tomar cualquier valor y la respuesta es
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

Otro tipo de restricciones para los x_j (cotas por arriba y por debajo) fueron estudiadas en la subsección 3.1.3, y remitimos a ella al lector que pudiera estar interesado (véanse también los ejercicios 3.4.1 y 3.4.2).

2. Bolas y cajas numeradas

Consideremos ahora n bolas numeradas y k cajas numeradas. Éste es también una cuestión que ya hemos tratado ampliamente. Una distribución de éstas se puede codificar como una lista de n posiciones, en cada una de las cuales puede ir, en principio, un elemento cualquiera del conjunto $\{1, \dots, k\}$. En la posición j informamos de a qué caja ha ido la bola j.

En otros términos, que también hemos considerado, son las aplicaciones de un conjunto con n elementos en uno con k elementos. Los casos más relevantes son:

- si pueden quedar cajas vacías (esto es, si la lista es sin restricciones, o si queremos contar todas las posibles aplicaciones), entonces k puede tomar cualquier valor y la respuesta es
$$k^n \,.$$
- Si no permitimos cajas vacías (es decir, si en la lista deben aparecer todos los símbolos de $\{1, \dots, k\}$, o bien si queremos contar las aplicaciones sobreyectivas), entonces $n \geq k$ y la respuesta es
$$k!\, S(n,k)\,,$$
donde los $S(n,k)$ son los números de Stirling de segunda especie, a los que dedicamos la subsección 3.3.1 (allí podrá encontrar el lector fórmulas explícitas para ellos, así como la regla de recursión que permite calcularlos).

Recordamos también que si exigimos que en la distribución de las n bolas en k cajas vayan a_j bolas en la caja j, donde los números $a_1, \dots, a_k$ suman n, entonces la respuesta está (véase la subsección 3.1.5) en el coeficiente multinómico
$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k}.$$

3. Bolas numeradas, cajas idénticas

Tenemos n bolas numeradas, que queremos distribuir en k cajas idénticas. Estamos partiendo un conjunto de n elementos en k bloques.

- Si no permitimos que haya cajas vacías (los bloques son no vacíos), entonces $n \geq k$ y la respuesta es
$$S(n,k)\,.$$
- Ahora permitimos que haya cajas vacías. El parámetro k, en principio, puede tomar cualquier valor. Si llamamos j al número de cajas que contienen alguna bola, entonces la respuesta es
$$\sum_{j=1}^{\text{mín}(n,k)} S(n,k)\,.$$
Si $k < n$, entonces la suma anterior es $S(n,1) + \cdots + S(n,k)$. En caso de que $k \geq n$, la suma es completa: $S(n,1) + \cdots + S(n,n)$, que coincide con el número de Bell $B(n)$.

4. Bolas y cajas idénticas

Tenemos n bolas y k cajas. Ahora estamos con la cuestión de las particiones del entero n (revísese la subsección 3.3.3).

- Si no quedan cajas vacías, entonces hay k términos en la partición de n, y la respuesta es

$$p_k(n) .$$

- Ahora permitimos cajas vacías (k podría tomar, en principio, cualquier valor). Pero, como antes, si llamamos j al número de cajas que llevan bolas, la respuesta es

$$\sum_{j=1}^{\text{mín}(n,k)} p_j(n) .$$

  Si $k < n$, la suma no es completa: $p_1(n) + \cdots + p_k(n)$. En el caso en que $k \geq n$, la respuesta es el número total de particiones del entero n, $p(n)$.

Para estos números $p_k(n)$ y $p(n)$ no disponemos de unas fórmulas explícitas. Pero en la subsección 3.3.3 vimos las reglas de recurrencia que permitían su cálculo.

EJERCICIOS.

3.4.1 *Reinterpretar las distribuciones de n bolas idénticas en k cajas numeradas (donde permitimos cajas vacías) en términos de multiconjuntos de tamaño n con los símbolos $\{1, \dots, k\}$. Revisar entonces la subsección 3.1.8 para comprobar que el número de distribuciones de n bolas idénticas en k cajas numeradas es $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

3.4.2 *Clasificar las distribuciones de n bolas idénticas en k cajas numeradas en función del número de cajas que vayan realmente llenas para recuperar la fórmula de Vandermonde (véase, por ejemplo, las páginas 119 y 129).*

3.4.3 *Sea $f(n, k)$ el número de formas de poner n bolas numeradas en k* ***tubos*** *numerados. El diámetro del tubo es sólo un poco mayor que el diámetro de las bolas, de forma que podemos distinguir el orden de las bolas dentro de cada tubo. Permitimos que algunos tubos queden vacíos (así que k puede tomar cualquier valor). Comprobar que*

$$f(n, k) = k(k + 1) \cdots (k + n - 1)$$

(a) por inducción en n, el número de bolas;

(b) con un argumento combinatorio: una distribución de éstas es una lista de $n + k - 1$ posiciones en las que situamos n símbolos distintos (las bolas), así como $k - 1$ separadores idénticos (que marcan dónde empieza cada tubo);

(c) suponiendo, por un momento, que las bolas son indistinguibles (de manera que los tubos se "convierten" en cajas), para luego volver a la situación original.

3.4.4 *Queremos contar ahora las formas de distribuir n bolas numeradas en k tubos numerados, pero donde no permitimos que queden tubos vacíos (así que $n \geq k$). Comprobar que la respuesta es ahora*

$$\binom{n}{k} k!\, f(n-k,k) \qquad \text{o, en otros términos,} \qquad n!\binom{n-1}{k-1}.$$

Sugerencia. Colocar k bolas en el fondo de los tubos y luego repartir el resto. O bien suponer primero que las bolas son indistinguibles, en cuyo caso estamos con cajas.

3.4.5 *Sea $g(n,k)$ el número de formas de distribuir n bolas numeradas en k tubos idénticos, donde no permitimos que queden tubos vacíos (así que $n \geq k$). Compruébese que*

$$g(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}.$$

Deducir que, si permitimos tubos vacíos, la respuesta es

$$\sum_{j=1}^{\text{mín}(n,k)} \frac{n!}{j!}\binom{n-1}{j-1}.$$

3.4.6 *Comprobar, finalmente, que si las bolas no están numeradas (da igual si los tubos lo están o no), los tubos son, simplemente, cajas (y se aplican los resultados correspondientes).*